Ein Satz vom Jacksonschen Typ für algebraische Polynome

Von SIEGFRIED PAWELKE in Jülich (BRD)

1. Einleitung

Sei f eine stetige Funktion auf $[-1, 1]$ mit dem gewöhnlichen Stetigkeitsmodul $\omega(f; h)$. Der Satz von D. JACKSON [11] sagt aus, daß es ein algebraisches Polynom $P_n(x)$ vom Grade $\leqq n$ gibt, so daß gilt

$$(1.1) \qquad |f(x)-P_n(x)| \leqq M_1\,\omega\left(f; \frac{1}{n}\right) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1).$$

Dieses Ergebnis wurde von A. F. TIMAN [29] wie folgt verbessert: Es gibt ein algebraisches Polynom $P_n(x)$ vom Grade $\leqq n$, so daß gilt

$$(1.2) \qquad |f(x)-P_n(x)| \leqq M_2\,\omega(f; \Delta_n(x)) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

wobei $\Delta_n(x)$ definiert ist durch

$$(1.3) \qquad \Delta_n(x) = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right).$$

G. G. LORENTZ [16, p. 65] wählt an Stelle von $\Delta_n(x)$ den Ausdruck

$$\Delta_n^*(x) = \max\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \frac{1}{n^2}\right).$$

Wegen $\Delta_n(x) \leqq 2\Delta_n^*(x) \leqq 2\Delta_n(x)$ kann man in (1.2) Δ_n durch Δ_n^* ersetzen und umgekehrt. Außerdem ist die unten erwähnte Verallgemeinerung auf L^p-Räume leichter mit der Funktion Δ_n durchzuführen.

V. K. DZYADYK [8] und A. F. TIMAN [30] haben folgende Umkehrung als Verschärfung eines Ergebnisses von S. N. BERNSTEIN [2] bewiesen: Gibt es für eine Funktion f eine Folge von algebraischen Polynomen P_n, die die Bedingung

$$(1.4) \qquad |f(x)-P_n(x)| \leqq M\omega^*(\Delta_n(x)) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

erfüllen, wobei ω^* eine Funktion ist, die die Eigenschaften eines Stetigkeitsmoduls besitzt (s. z. B. [16, p. 43]), dann existiert eine Konstante $C>0$, so daß gilt

$$\omega(f; h) \leqq C \cdot h \cdot \int_h^1 \frac{\omega^*(u)}{u^2} du. \tag{1. 5}$$

Diese Ergebnisse wurden von M. K. Potapov [22] auf die Approximation von L^p-Funktionen in der L^p-Norm verallgemeinert.

In der Bedingung (1. 2) hängt die Approximationsordnung von dem betreffenden Punkt x ab. Sie ist in den Endpunkten des Intervalls $[-1, +1]$ besser als im Innern. Man kann nun versuchen, den Stetigkeitsmodul ω in (1. 1) so zu einer Funktion Ω zu verallgemeinern, daß die Abschätzung (1. 1) noch für den verallgemeinerten Stetigkeitsmodul gültig ist. Dies wurde schon von G. V. Židkov [32] bei der Approximation in der L^2-Norm getan und von A. S. Džafarov [7] für die C-Norm durchgeführt, wobei er Ergebnisse von G. G. Kušnirenko [13, 14] für Funktionen, die auf der Einheitskugel im $\mathbf{R}^3$ definiert sind, angewandt hat. Verallgemeinerungen der Ergebnisse auf gewichtete L^2-Räume stammen von S. Z. Rafalson [23, 24, 25]. Für beliebige L^p-Räume $(p \geqq 1)$ gibt es Ergebnisse von M. K. Potapov [22].

Das Ziel dieser Arbeit ist es, mehrere verallgemeinerte Stetigkeitsmoduln einzuführen und Sätze vom Jacksonschen Typ in der C-Norm und der L^p-Norm zu beweisen. Beim Beweis des Jacksonschen Satzes wird an Stelle eines gewöhnlichen Faltungsintegrals ein Integral vom ultrasphärischen Faltungstyp benutzt. Man erhält damit einen neuen direkten Beweis des Jacksonschen Satzes für algebraische Polynome (vergleiche R. de Vore [31] und R. Bojanic [4]), wobei in dieser Arbeit eine schwächere Form des Stetigkeitsmoduls benutzt wird.

Im fünften Abschnitt werden Approximationssätze für Funktionen bewiesen, die gewissen Differenzierbarkeitseigenschaften genügen. Nach einem Beispiel im 6. Abschnitt folgt im 7. Abschnitt eine Verallgemeinerung der Ergebnisse auf Funktionen, die auf der Oberfläche der Einheitskugel im k-dimensionalen euklidischen Raum definiert sind.

2. Bezeichnungen

Es sei C die Menge der auf dem Intervall $[-1, 1]$ stetigen Funktionen mit der üblichen Norm. Mit L^p_λ, $1 \leqq p < \infty$, $\lambda \geqq 0$, wird die Menge der auf $(-1, 1)$ Lebesgue-messbaren Funktionen bezeichnet, für die das Integral

$$\|f\|_{p,\lambda} = \left\{ \int_{-1}^{1} |f(x)|^p w_\lambda(x)\, dx \right\}^{1/p} \tag{2. 1}$$

existiert und endlich ist, wobei die Gewichtsfunktion w_λ gegeben ist durch

$$w_\lambda(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \, dy \Big)^{-1}. \tag{2.2}$$

Mit X ist immer einer der Räume C oder L^p_λ gemeint. Orthogonalisiert man die Funktionen $1, x, x^2, \ldots$ bezüglich der Gewichtsfunktion w_λ, dann erhält man die Gegenbauer- oder ultrasphärischen Polynome $P^\lambda_n(x)$. Normalisiert man sie durch die Bedingung

$$P^\lambda_n(1) = 1, \tag{2.3}$$

dann gilt

$$|P^\lambda_n(x)| \leqq 1 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1), \tag{2.4}$$

$$\int_{-1}^{1} P^\lambda_n(x) P^\lambda_m(x) w_\lambda(x) \, dx = \frac{\delta_{nm}}{c(n, \lambda)} \qquad (\lambda > 0), \tag{2.5}$$

$$c(n, \lambda) = \frac{n+\lambda}{\lambda} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda) n!} \qquad (\lambda > 0), \tag{2.6}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} c(n, \lambda) P^\lambda_n(\cos\vartheta) = \frac{2}{n} \cos n\vartheta \qquad (n \geqq 1). \tag{2.7}$$

Einer Funktion f aus X kann man die Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c(n, \lambda) f^\wedge(n) P^\lambda_n(x), \tag{2.8}$$

$$f^\wedge(n) = \int_{-1}^{1} P^\lambda_n(y) f(y) w_\lambda(y) \, dy \tag{2.9}$$

zuordnen, wobei die Funktion f durch die Koeffizienten $f^\wedge(n)$ eindeutig bestimmt ist.

Die ultrasphärische Faltung zweier Funktionen f, g aus L^1_λ ist für $\lambda > 0$ definiert durch

$$(f * g)_\lambda(x) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f\big(xy + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \cdot z\big) \cdot v_\lambda(z) \, dz \, g(y) w_\lambda(y) \, dy \tag{2.10}$$

$$v_\lambda(z) = (1-z^2)^{\lambda-1} \Big\{ \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\lambda-1} \, du \Big\}^{-1}. \tag{2.11}$$

Für $\lambda = 0$ gilt

$$(f * g)_0(x) = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2} \big\{ f\big(xy + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}\big) + \\ + f\big(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}\big) \big\} g(y) w_\lambda(y) \, dy. \tag{2.12}$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

$$(f*g)_\lambda = (g*f)_\lambda, \tag{2.13}$$

$$(f*g)^\wedge_\lambda(n) = f^\wedge(n)\cdot g^\wedge(n). \tag{2.14}$$

Ist $f \in L^1_\lambda$, $g \in L^p_\lambda$ oder $g \in C$, dann gilt

$$\|(f*g)_\lambda\|_{p,\lambda} \leqq \|f\|_{1,\lambda}\cdot\|g\|_{p,\lambda}, \tag{2.15}$$

$$\|(f*g)_\lambda\|_C \leqq \|f\|_{1,\lambda}\cdot\|g\|_C. \tag{2.16}$$

Man definiert nun eine verallgemeinerte Translation $T^\lambda_h f$ von f für $h>0$ durch

(2.17)

$$(T^\lambda_h f)(x) = \begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} f(x\cos h + z\sqrt{1-x^2}\sin h)v_\lambda(z)\,dz & (\lambda>0), \\ \frac{1}{2}\{f(x\cos h+\sqrt{1-x^2}\sin h)+f(x\cos h-\sqrt{1-x^2}\sin h)\} & (\lambda=0). \end{cases}$$

$T^\lambda_h f$ ist für alle $f\in X$ definiert, und es gilt

$$\|T^\lambda_h f\|_X \leqq \|f\|_X, \tag{2.18}$$

$$(T^\lambda_h f)^\wedge(n) = f^\wedge(n)\,P^\lambda_n(\cos h), \tag{2.19}$$

$$\lim_{h\to 0}\|T^\lambda_h f - f\|_X = 0. \tag{2.20}$$

Die Faltung kann damit in der Form

$$(f*g)_\lambda(x) = \int\limits_0^\pi (T^\lambda_h f)(x)g(\cos h)w_\lambda(\cos h)\sin h\,dh \tag{2.21}$$

geschrieben werden.

Die Eigenschaften (2. 3)—(2. 9) sind bekannt [28]. Der Begriff der ultrasphärischen Faltung wurde von S. Bochner [3] eingeführt. In der Arbeit [3] sind auch die Eigenschaften (2. 13)—(2. 16) und (2. 18)—(2. 20) bewiesen worden.

B e m e r k u n g 2. 1. Man kann die verallgemeinerte Translation auch durch die Formel (2. 19) definieren. In Fall der Jacobi-Polynome wurden die so entstandenen Translationen von R. Askey und St. Wainger [1] und von C. Ganser [10] untersucht.

3. Der verallgemeinerte Stetigkeitsmodul

In der angestrebten Verallgemeinerung des in der Einleitung zitierten Satzes von Jackson wird der Stetigkeitsmodul $\omega(f, h)$ im wesentlichen durch die Differenz $\|T_h f - f\|$ ersetzt. Man definiert den verallgemeinerten Stetigkeitsmodul von f durch

$$\Omega_\lambda(f; h) = \sup_{0<t\leq h} \|T_t^\lambda f - f\| \qquad (0 < h \leqq \pi). \tag{3.1}$$

Es gilt: $\Omega_\lambda(f; h)$ ist eine auf $0<h\leqq\pi$ stetige, monoton wachsende Funktion mit

$$\lim_{h\to 0} \Omega_\lambda(f; h) = 0 \qquad (f\in X). \tag{3.2}$$

Außerdem gilt:

Lemma 3. 1. *Zu jedem $f\in X$ gibt es eine für $0<t<\infty$ definierte, monoton wachsende, konkave (daher stetige) Funktion $K(t;f)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$$K(t;f) \leqq \max\left(1, \frac{t}{s}\right) K(s;f) \qquad (s, t > 0), \tag{3.3}$$

$$\Omega_\lambda(f; h) \leqq C_1 \cdot K(h^2; f) \leqq C_2 \Omega_\lambda(f; h) \qquad (0 < h \leqq \pi), \tag{3.4}$$

wobei C_1 und C_2 (von λ abhängige) positive Konstanten sind.

$K(t,f)$ ist das von J. Peetre 1963 eingeführte K-Funktional. Der Beweis ist in [5, ch. III], [20] und [15] zu finden. Aus der Ungleichung (3. 3) folgt

$$K(\alpha \cdot t; f) \leqq (\alpha + 1) \cdot K(t; f) \qquad (\alpha, t > 0). \tag{3.5}$$

4. Ein Satz vom Jacksonschen Typ

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Jacksonsatzes.

Satz 4. 1. *Es sei $f\in X$ und Ω_λ wie oben definiert. Dann gibt es eine Folge von algebraischen Polynomen $I_n^\lambda f$, so daß gilt*

$$\|f - I_n^\lambda f\| \leqq M \Omega_\lambda\left(f; \frac{1}{n}\right), \tag{4.1}$$

wobei die Folge $I_n^\lambda f$ und die Konstante M von λ abhängen.

Zum Beweis des Satzes wird eine Folge von Polynomen $I_n^\lambda f$ angegeben, die sich als ultrasphärische Faltung von f mit nichtnegativen Polynomen darstellen läßt. Diese Polynome wurden von D. J. NEWMAN und H. S. SHAPIRO [18] zum Beweis des Jacksonschen Satzes für Funktionen auf der Einheitskugel benutzt. Wie schon oben erwähnt, verwenden R. DE VORE [31] und R. BOJANIC [4] gewöhnliche Faltungsintegrale. In allen Fällen wurde der gewöhnliche Stetigkeitsmodul benutzt. Dieser Beweis beruht wesentlich auf der Ungleichung (3. 5). Man definiert das Polynom k_{2m} vom Grade $2m$ durch

$$k_{2m}(x) = \{P^{\lambda}_{m+1}(x)/(x-x_{m+1})\}^2, \tag{4.2}$$

wobei x_{m+1} die größte Nullstelle von $P^{\lambda}_{m+1}(x)$ ist. Dieses Polynom hat folgende Eigenschaften.

Lemma 4. 2. *Unter allen Polynomen $T(x)$, $T\not\equiv 0$, vom Grade $\leqq 2m$, die nicht negativ sind für $-1\leqq x\leqq 1$, wird der Quotient*

$$\int_{-1}^{1} xT(x)w_\lambda(x)\,dx\cdot\Big\{\int_{-1}^{1} T(x)w_\lambda(x)\,dx\Big\}^{-1} \tag{4.3}$$

maximal, falls $T(x)=ck_{2m}(x)$ ist, wobei $c\neq 0$ eine beliebige Konstante ist. Das Maximum hat den Wert x_{m+1}.

Dieses Lemma stammt von D. J. NEWMAN und H. S. SHAPIRO [18]. Außerdem wird noch eine Abschätzung für x_{m+1} benötigt.

Lemma 4. 3. *Für die größte Nullstelle x_{m+1} von $P^{\lambda}_{m+1}(x)$ gilt die Abschätzung*

$$1-x_{m+1} \leqq c_\lambda\cdot\frac{1}{m^2} \tag{4.4}$$

für genügend große m, wobei $c_\lambda>0$ nur von λ abhängt.

Beweis. Aus der Monotonie der Nullstellen $x_{m+1}(\lambda)$ als Funktion von λ (s. [28, ch. 6. 21]) folgt $x_{m+1}(\lambda)\geqq x_{m+1}(\{\lambda\})$, wobei $\{\lambda\}$ der kleinste halbzahlige Wert größer gleich λ ist. Für die Werte $\{\lambda\}$ ist (4. 4) ebenfalls von D. J. NEWMAN und H. S. SHAPIRO [18] bewiesen worden. Damit gilt für beliebige $\lambda\geqq 0$

$$1-x_{m+1}(\lambda) \leqq 1-x_{m+1}(\{\lambda\}) \leqq c_\lambda\cdot\frac{1}{m^2},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung 4. 4. Für $0\leqq\lambda\leqq 1$ gewinnt man diese Abschätzung direkt aus den bekannten Ungleichungen für die Nullstellen der ultrasphärischen Polynome (s. [28, ch. 6. 21]).

Beweis von Satz 4. 1. Wir definieren eine Folge von Polynomen vom Grade $n=2m$ durch

$$(I_n^\lambda f)(x) = c_n(k_n * f)_\lambda(x) \tag{4. 5}$$

$$c_n^{-1} = \int_{-1}^{1} k_n(x) w_\lambda(x)\, dx. \tag{4. 6}$$

Wegen (2. 14) ist klar, daß $I_n^\lambda f$ ein Polynom vom Grade $\leqq n$ ist. Weiter gilt wegen (2. 21)

$$(I_n^\lambda f)(x) - f(x) = c_n \int_0^\pi \{(T_h^\lambda f)(x) - f(x)\} k_n(\cos h) w_\lambda(\cos h) \cdot \sin h\, dh.$$

woraus mit (3. 1) und (3. 4) folgt

$$\|I_n^\lambda f - f\| \leqq c_n \int_0^\pi \|T_h^\lambda f - f\| k_n(\cos h) w_\lambda(\cos h) \sin h\, dh$$

$$\leqq c_n \cdot C_1 \int_{-1}^{\pi} K(h^2; f) k_n(\cos h) w_\lambda(\cos h) \sin h\, dh.$$

Die Ungleichung (3. 5) ergibt nun

$$K(h^2; f) = K\left(h^2 \cdot n^2 \cdot \frac{1}{n^2}; f\right) \leqq (1 + n^2 h^2) \cdot K\left(\frac{1}{n^2}; f\right)$$

und damit wieder mit (3. 4)

$$\|T_n^\lambda f - f\| \leqq C_2 \Omega_\lambda\left(f; \frac{1}{n}\right) \left\{1 + n^2 \cdot c_n \int_0^\pi h^2 k_n(\cos h) w_\lambda(\cos h) \sin h\, dh\right\}.$$

Mit

$$h^2 \leqq \frac{\pi^2}{2}(1 - \cos h) \qquad (0 \leqq h \leqq \pi),$$

der Substitution $x = \cos h$, Lemma 4. 2 und Lemma 4. 3 folgt

$$\|I_n^\lambda f - f\| \leqq C_2 \Omega_\lambda\left(f; \frac{1}{n}\right) \left\{1 + n^2 \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot c_n \int_{-1}^{1} (1 - x) k_n(x) w_\lambda(x)\, dx\right\} \leqq$$

$$\leqq C_2 \Omega_\lambda\left(f; \frac{1}{n}\right)\left(1 + n^2 \cdot \frac{\pi^2}{2}(1 - x_{m+1})\right) \leqq C_2 \Omega_\lambda\left(f; \frac{1}{n}\right)\left(1 + n^2 \frac{\pi^2}{2} c_\lambda \cdot \frac{1}{m^2}\right) \leqq$$

$$\leqq M \Omega_\lambda\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

womit Satz 4. 1 bewiesen ist.

Bemerkung 4. 5. Die von D. J. NEWMAN und H. S. SHAPIRO [18] eingeführten Polynome $k_n(t)$ sind eine Verallgemeinerung der Polynome von L. FEJÉR [9] und P. P. KOROVKIN [12]. Im Falle $\lambda=0$ sind sie mit diesen identisch, wie die Darstellung von I. M. PETROV [21] zeigt.

Bemerkung 4. 6. Für die Funktion $\Omega(h)=h^\alpha$, $0<\alpha<1$, wurde das Ergebnis von Satz 4. 1 im Falle $X=L^2_{1/2}$ von G. V. ŽIDKOV [32] bewiesen, im Falle $X=L^2_\lambda$, $\lambda>0$, von S. Z. RAFALSON [23, 24, 25], im Falle $X=C$ und $\lambda=\frac{1}{2}$ von A. S. DŽAFAROV [7], für $X=L^p_0$, $1\leqq p\leqq\infty$, von M. K. POTAPOV [22].

5. Funktionen mit Differenzierbarkeitseigenschaften

Es sollen jetzt mit dem obigen zusammenhängende Folgerungen aus Differenzierbarkeitseigenschaften von f gezogen werden. Dazu benutzen wir den Differentialoperator Δ_λ, der formal gegeben ist durch

$$\Delta_\lambda = (1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}.$$

Er hat die Eigenwerte $-n(n+2\lambda)$ und die Eigenfunktionen $P_n^\lambda(x)$, d.h. es gilt

$$\Delta_\lambda P_n^\lambda(x) = -n(n+2\lambda)P_n^\lambda(x) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

wobei $P_n^\lambda(x)$ die einzigen polynomialen Eigenfunktionen des Operators Δ_λ sind (s. [28, ch. 4. 2]).

Sein Definitionsbereich wird durch das folgende Lemma charakterisiert.

Lemma 5. 1. *Für eine Funktion $f\in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *es existiert eine Funktion $g\in X$, so daß gilt*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{2(2\lambda+1)h^2}\cdot(T_h^\lambda f-f)-g\right\| = 0;$$

b) *es existiert eine Funktion $g\in X$, so daß gilt*

$$-n(n+2\lambda)f^\wedge(n) = g^\wedge(n);$$

c) *$f(x)$ ist lokal absolut stetig auf $(-1, 1)$, die Funktion $(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}f'(x)$ ist absolut stetig auf $[-1, 1]$, verschwindet für $x=\pm 1$, und es existiert eine Funktion $g\in X$ so daß für $-1\leqq x\leqq 1$ gilt*

$$(1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}f(x)\right\} = g(x).$$

Dieses Lemma ist in [19, Sätze 4. 2. 5 und 5. 4. 3] bewiesen. Der Definitionsbereich des Operators Δ_λ ist in Teil c) genau angegeben.

Definition 5. 2. Man sagt, $f \in X$ ist aus dem Definitionsbereich von Δ_λ, $f \in D(\Delta_\lambda)$, falls f der Bedingung c) in Lemma 5.1 genügt.

Δ_λ ist eine echte Verallgemeinerung der zweiten Ableitung, wie man am Beispiel der Funktion $f(x) = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ und $X=C$ sieht. Es wird nun eine einfache Folgerung aus Satz 4. 1 angegeben.

Folgerung 5. 3.

a) *Ist* $f \in X$, *und gilt* $\Omega_\lambda(f; h) \leqq M h^\alpha$ *mit* $0<\alpha\leqq 2$, *dann folgt*

$$\|I_n^\lambda f - f\| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad (n \to \infty).$$

b) *Ist* $f \in D(\Delta_\lambda)$, *dann folgt*

$$\|I_n^\lambda f - f\| = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Teil a) folgt direkt aus Satz 4. 1. Teil b) folgt aus der Beziehung (s. [19, Lemma 4. 2. 3])

$$T_h^\lambda f - f = \int_0^h (\sin t)^{-2\lambda} \int_0^t T_u \Delta_\lambda f \cdot (\sin u)^{2\lambda}\, du\, dt, \tag{5.1}$$

woraus sich $\|T_h^\lambda f - f\| \leqq \|\Delta_\lambda f\| \cdot h^2$ ergibt.

Bemerkung 5. 4. Im klassischen Satz von Jackson ergibt sich die Approximationsordnung n^{-2} im Raume C nur, falls man voraussetzt, daß die 2. Ableitung von f wesentlich beschränkt ist[1]). Die hier verlangten Voraussetzungen sind an den Endpunkten des Intervalls schwächer, wie man an der Bedingung c) in Lemma 5. 1 sieht.

Beziehungen zwischen dem Verhalten von $\Omega_\lambda(f; h)$ für $h \to 0$ und den durch X und dem Definitionsbereich von Δ_λ erzeugten intermediären Räumen geben J. Löfström und J. Peetre [15]. Eines ihrer wesentlichsten Ergebnisse ist hier in (3.4) von Lemma 3. 1 formuliert.

Man definiert höhere Potenzen von Δ_λ in der üblichen Weise:

Definition 5. 5. Man sagt, ein Element $f \in X$ ist aus $D(\Delta_\lambda^r), r>1$, falls $f \in D(\Delta_\lambda^{r-1})$ und für die Funktion $g = \Delta_\lambda^{r-1} f$ gilt $g \in D(\Delta_\lambda)$. $\Delta_\lambda^r f$ ist dann definiert durch $\Delta_\lambda^r f = \Delta_\lambda(\Delta_\lambda^{r-1} f)$.

[1]) Die Verschärfung von A. F. Timan (s. Einleitung) ergibt die Approximationsordnung $\{\Delta_n(x)\}^2$, wobei $\Delta_n(x)$ in (1. 3) definiert ist.

Um das Ergebnis aus Abschnitt 4 und Folgerung 5. 3 auf höhere Potenzen von n zu übertragen, benutzen wir den Begriff der besten Approximation. Es sei

$$(5.2)\qquad E_n(X,f) = \min_{T_n \in \mathfrak{T}_n} \|f - T_n\|,$$

wobei $\mathfrak{T}_n$ die Menge der algebraischen Polynome vom Höchstgrad n ist. Für $f \in X$ mit $f^\wedge(0)=0$ definiert man noch

$$(5.3)\qquad E_n^*(X,f) = \min_{\substack{T_n \in \mathfrak{T}_n \\ T_n^\wedge(0)=0}} \|f - T_n\|.$$

Da für $f \in X$ gilt $E_n(X,f) \leqq \|I_n^\lambda f - f\|$ und, falls $f^\wedge(0)=0$ ist, auch $E_n^*(X,f) \leqq \|I_n^\lambda f - f\|$, ergibt Satz 4. 1 die Aussage $E_n(X,f) \leqq M\Omega_\lambda\left(f; \frac{1}{n}\right)$ bzw. $E_n^*(X,f) \leqq M\Omega_\lambda\left(f; \frac{1}{n}\right)$. Es wird nun die folgende Abschätzung bewiesen.

Satz 5. 6. *Es sei $f \in X$ und $f \in D(\Delta_\lambda^r)$, $r \geqq 1$, dann gilt*

$$E_n(X,f) \leqq M^r \cdot n^{-2r} E_n^*(X, \Delta_\lambda^r f) \leqq M^{r+1} n^{-2r} \Omega_\lambda\left(\Delta_\lambda^r f; \frac{1}{n}\right).$$

Beweis. Er verläuft wie üblich. Zunächst sei $r=1$ und U_n das Polynom, für das gilt

$$E_n^*(X, \Delta_\lambda f) = \|\Delta_\lambda f - U_n\|$$

und V_n das Polynom mit $V_n^\wedge(0)=0$, für das gilt $\Delta_\lambda V_n = U_n$, dann ergibt sich mit Satz 4. 1 und Folgerung 5. 3

$$E_n(X,f) = E_n(X, f - V_n) \leqq Mn^{-2} \|\Delta_\lambda f - \Delta_\lambda V_n\| \leqq$$

$$\leqq Mn^{-2} \|\Delta_\lambda f - U_n\| = Mn^{-2} E_n^*(X, \Delta_\lambda f) \leqq M^2 n^{-2} \Omega_\lambda\left(\Delta_\lambda f; \frac{1}{n}\right).$$

Den Beweis für $r>1$ erhält man durch vollständige Induktion.

Bemerkung 5. 7. G. G. Kušnirenko [13, 14] hat einen ähnlichen Satz für stetige Funktionen auf der Einheitskugel im $\mathbf{R}^3$ bewiesen. Als Anwendung dieses Satzes erhält A. S. Džafarov [7] das Ergebnis von Satz 5. 6 für den Raum $X=C$ und $\lambda = \frac{1}{2}$.

Folgerung 5. 8. *Es sei $f \in X$, $g = \Delta_\lambda^r f \in X$ und $\Omega_\lambda(g; h) \leqq h^\alpha$, $0 < \alpha \leqq 2$, dann folgt*

$$E_n(X,f) \leqq C \cdot \frac{1}{n^{2r+\alpha}}.$$

6. Ein Beispiel

Die Ergebnisse werden nun an einem einfachen Beispiel erläutert. Es sei $X=C$, $\lambda=0$ und $f_\alpha(x)=(1-x^2)^{\alpha/2}$, $0<\alpha\leqq 1$. Für diese Funktion gilt wegen $f_\alpha(\cos\vartheta)=$ $=|\sin\vartheta|^\alpha$

$$\|T_h^0 f_\alpha - f_\alpha\| \leqq Mh^\alpha.$$

Also gilt nach Folgerung 5. 3

$$\|I_n^0 f_\alpha - f_\alpha\| \leqq K\frac{1}{n^\alpha}.$$

Die Funktion f_α gehört auf dem Intervall $[-1, 1]$ höchstens der Klasse Lip $\frac{\alpha}{2}$ an, da für $x=1$ und $0<h<1$ gilt

$$|f_\alpha(1-h)-f_\alpha(1)| = \left(1-(1-h)^2\right)^{\alpha/2} = (2h-h^2)^{\alpha/2} > h^{\alpha/2}$$

(s. [17, ch. VI, 3]). Man würde nach dem klassischen Satz von Jackson höchstens erhalten

$$E_n(C,f_\alpha)=0(n^{\alpha/2}) \qquad (n\to\infty).$$

Es ist aber gezeigt worden [17, ch. VI, 1; VII, 1; VIII, 3], daß im Falle $\alpha=1$ sogar die Abschätzung

$$\frac{1}{2\pi(2n+1)} < E_n(C,f_1) \leqq \frac{2}{\pi n} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

gültig ist. Für $0<\alpha<1$ erhält man mit einem Satz von S. B. Stečkin [27], daß zwei positive Konstanten K_1 und K_2 existieren, so daß gilt

$$K_1 n^{-\alpha} \leqq E_n(C,f_\alpha) \leqq K_2 n^{-\alpha}.$$

Mit der hier bewiesenen Version des Satzes von Jackson (Satz 4. 1) erhält man die rechte Seite der Ungleichung ebenfalls, wie oben gezeigt wurde.

7. Funktionen auf der Kugel

Das Ergebnis von Satz 4. 1 läßt sich leicht auf Funktionen übertragen, die auf der Oberfläche S^k der Einheitskugel des k-dimensionalen euklidischen Raumes $\mathbf{R}^k$ definiert sind. Mit $C(S^k)$ bezeichnen wir die Menge der auf S^k stetigen Funktionen, $L^p(S^k)$, $1\leqq p<\infty$, die Menge der auf S^k definierten und dort bezüglich des Oberflächenelementes ds zur p-ten Potenz integrierbaren Funktionen mit der Norm

(7. 1) $$\|f\|_p = \left\{\frac{1}{O_k}\int_{S^k} |f(x)|^p\, ds(x)\right\}^{1/p};$$

wobei O_k die Oberfläche der Einheitskugel ist. Zonale Funktionen sind Funktionen, die invariant sind gegenüber Drehungen um eine Achse durch einen festgelegten Nordpol auf S^k. Es besteht ein isometrischer Isomorphismus zwischen der Menge der zonalen Funktionen aus $L^p(S^k)$ und dem Banachraum L^p_λ für $2\lambda = k-2$.

Man definiert die verallgemeinerte Translation von $f \in L^1(S^k)$ oder das sphärische Mittel von f durch

$$(7.2) \qquad (T_h f)(x) = \frac{1}{O_{k-1}(\sin h)^{2\lambda}} \int_{(x,y)=\cos h} f(y)\, dt(y),$$

wobei dt das $(k-2)$-dimensionale Oberflächenelement der Fläche $(x, y)=\cos h$ auf S^k und (x, y) das euklidische Skalarprodukt ist. Die Integration wird also auf dem Rand der Kugelkappe $D(x, h)$ mit Mittelpunkt x ausgeführt, wobei $D(x, h)$ gegeben ist durch

$$(7.3) \qquad D(x, h) = \{y;\, y \in S^k,\ (x,y) \geqq \cos h\}.$$

Für zonale Funktionen gilt $T_h f = T_h^\lambda f$ mit $\lambda = (k-2)/2$. Damit hat man eine anschauliche Definition der Translationen T_h^λ aus Abschnitt 2.

Nun sei X einer der Räume $C(S^k)$ oder $L^p(S^k)$, $1 \leqq p < \infty$. Für die Translationen T_h gilt ebenfalls für alle $f \in X$

$$(7.4) \qquad \|T_h f\| \leqq \|f\| \qquad (h > 0),$$

$$(7.5) \qquad \lim_{h \to 0} \|T_h f - f\| = 0.$$

Der Beweis ist in [19, Abschnitt 4. 2] zu finden.

Definiert man nun $\Omega(f; h)$ durch

$$(7.6) \qquad \Omega(f; h) = \sup_{0 < t \leqq h} \|T_h f - f\|,$$

dann gilt ein Analogon zu Lemma 3. 1 und

Satz 5. 1. *Zu jeder Funktion $f \in X$ gibt es eine Linearkombination $(V_n f)(x)$ von Kugelfunktionen $\{Y_m(x),\ m=0, 1, \ldots, n\}$, so daß gilt*

$$\|f - V_n f\| \leqq K \cdot \Omega\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

wobei K eine positive Konstante ist, die nicht von f abhängt.

Beweis. Analog zu Satz 4. 1 definiert man für gerade n die Funktion $V_n f$ durch

$$(V_n f)(x) = \frac{1}{O_k} \int_{S^k} k_n[(x, y)] f(y)\, ds(y),$$

wobei k_n durch (4. 2) definiert ist. Außerdem benutzt man die Beziehung

$$(V_n f)(x) = \frac{O_{k-1}}{O_k} \int_0^\pi k_n(\cos u)(T_u f)(x)(\sin u)^{2\lambda}\, du \qquad (\lambda = (k-2)/2),$$

wobei gilt

$$O_k/O_{k-1} = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Der weitere Teil des Beweises verläuft analog zu dem von Satz 4. 1. Dieser Satz wurde auf S_3 und $X=C$ mit anderen Methoden von A. S. DŽAFAROV [6] und G. G. KUŠNIRENKO [13, 14] bewiesen. Ein Analogon zu Satz 5. 6 für Funktionen auf der Kugel ist ebenfalls gültig. Ein Satz vom Jacksonschen Typ für Funktionen auf kompakten Mannigfaltigkeiten und Liegruppen stammt von D. L. RAGOZIN [26].

Literatur

[1] R. ASKEY and ST. WAINGER, A convolution structure for Jacobi series, *Amer. J. Math.*, **91** (1969), 463—485.

[2] S. N. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes de degré donné, *Mém. acad. royale Belg.*, **4** (1912), 1—104.

[3] S. BOCHNER, Positive zonal functions on spheres, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 1141—1147.

[4] R. BOJANIC, A note on the degree of approximation to continuous functions, *L'Enseignement Math.*, **15** (1969), 43—51.

[5] P. L. BUTZER und H. BERENS, *Semi-Groups of Operators and Approximation* (Berlin—Heidelberg—New York, 1967).

[6] A. S. DŽAFAROV, Über die Ordnung der besten Approximation stetiger Funktionen auf der Einheitskugel durch endliche sphärische Summen (russisch), *Studies Contemporary Constructive Theory of Functions* (Proc. Second All-Union Conf., Baku 1962), 46—52, Baku 1965.

[7] A. S. DŽAFAROV, Some direct and inverse theorems in the theory of best approximation of functions by algebraic polynomials, *Soviet Math. Dokl.*, **10** (1969), 916—919.

[8] V. K. DZYADYK, On a constructive characteristic of functions satisfying the Lipschitz condition α $(0<\alpha<1)$ on a finite segment of the real axis (russisch), *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Ser. Mat., **20** (1956), 623—642.

[9] L. FEJÉR, Über trigonometrische Polynome, *J. reine angew. Math.*, **146** (1916), 53—82.

[10] C. GANSER, Modulus of continuity conditions for Jacobi series, *J. Math. Anal. Appl.*, **27** (1969), 575—600.

[11] D. JACKSON, *The Theory of Approximation*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol XI (New York, 1930).

[12] P. P. KOROVKIN, Über eine asymptotische Eigenschaft positiver Methoden zur Summierung von Fourrierreihen und die günstigste Approximation der Klasse Z_2 durch lineare positive polynomiale Operatoren (russisch), *Uspehi Mat. Nauk*, **13** (1958), 99—103.

[13] G. G. KUŠNIRENKO, Über die Approximation von auf der Einheitskugel definierten Funktionen durch endliche sphärische Summen (russisch), *Naučn. Dokl. Vysš. Školy Fiz.-Mat. Nauki*, No. *4* (1958), 47—53.

[14] G. G. Kušnirenko, Einige Fragen der Approximation stetiger Funktionen auf der Einheitskugel mittels endlicher sphärischen Summen (russisch), *Trudy Charkov. Politechn. Inst. Ser. Inž. Fiz.*, **25** No 3 (1959), 3—22.

[15] J. Löfström and J. Peetre, Approximation Theorems Connected with Generalized Translations, *Math. Ann.*, **181** (1969), 255—268.

[16] G. G. Lorentz, *Approximation of functions* (New York, 1966).

[17] I. P. Natanson, *Konstruktive Funktionentheorie* (Berlin, 1955).

[18] D. J. Newman and H. S. Shapiro, Jackson's theorem in higher dimensions, in: *Über Approximationstheorie*, hrsgeg. v. P. L. Butzer u. J. Korevaar (Basel, 1964), 208—219.

[19] S. Pawelke, Saturation und Approximation bei Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen, *Dissertation TH Aachen* 1969.

[20] J. Peetre, A Theory of Interpolation of Normed Spaces, *Notas de Matematica* (Brasilia, 1963).

[21] I. M. Petrov, Die Ordnung der Approximation von Funktionen der Klasse Z_α durch gewisse polynomiale Operatoren (russisch), *Izv. Vysš. Učebn. Zaved Mat.*, **1** **(14)** (1960), 188—193.

[22] M. K. Potapov, Über die Approximation aperiodischer Funktionen durch algebraische Plynome (russisch), *Vestnik Mosk. Univ.*, **4** (1960), 14—25.

[23] S. Z. Rafalson, Mean approximation of functions by Fourier—Gegenbauer sums, *Math. Notes*, **3** (1968), 374—379.

[24] S. Z. Rafalson, Die Approximation von Funktionen durch Fourier—Jacobi-Summen, *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Mat.*, **4** (1968), 54—62.

[25] S. Z. Rafalson, Beste Approximation von Funktionen in $L^2_{p(x)}$-Metriken durch algebraische Polynome und die Fourierkoeffizienten nach orthogonalen Polynomen, *Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Mech. Astr.*, **7** (1969), 68—77.

[26] D. L. Ragozin, Approximation theory on compact manifolds and Lie groups, with applications to harmonic analysis (unpubl.), *Thesis Harvard Univ.* (Cambridge, Mass., 1967).

27] S. B. Stečkin, On the Order of Best Approximation of Continuous Functions (russisch), *Izv. Akad. Nauk SSSR*, **15** (1951), 219—242.

[28] G. Szegő *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol XXIII (New York, 1959).

[29] A. F. Timan, Strengthening of Jackson's theorem on the best approximation of continuous functions on a finite segment of the real axis (russisch), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **78** (1951), 17—20.

[30] A. F. Timan, Converse theorems of the constructive theory of functions defined on a finite segment of the real axis (russisch), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **116** (1957), 762—765.

[31] R. de Vore, On Jackson's theorem, *J. Approx. Theory*, **1** (1968), 314—318.

[32] G. V. Židkov, Constructive characterisation of a class of nonperiodic functions, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 1036—1040.

LEHRSTUHL FÜR NUMERISCHE UND ANGEW. MATH.
UNIVERSITÄT, GÖTTINGEN

(Eingegangen am 8. Mai 1971)